Estimation non-paramétrique pour des diffusions cinétiques hypoelliptiques partiellement observées

Clémentine PRIEUR[a]
en collaboration avec
Patrick CATTIAUX[b] et Jose R. LEÓN[c]

[a]Université Joseph Fourier (Grenoble)
[b]Université Paul Sabatier (Toulouse)
[c] Université Centrale de Caracas (Venezuela)

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Modèle

On considère un système hamiltonien amorti, perturbé par un bruit blanc: $\left(Z_t := (X_t, Y_t) \in \mathbb{R}^{2d}\ ,\ t \geq 0\right)$ régi par

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt \\ dY_t = \Sigma(X_t, Y_t) dW_t - (c(X_t, Y_t) Y_t + \nabla V(X_t)) dt \end{cases}$$

où W désigne un mouvement brownien standard.

Exemples

Particule en communication avec un réservoir:
On considère une particle dans un potentiel V. Sa dynamique est déterminée par le Hamiltonien $H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$: $\dot{q} = \partial_p H$, $\dot{p} = -\partial_q H$.

Cette particule est en contact avec un réservoir de chaleur à température $T > 0$, modélisé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck agissant comme un bruit sur le moment p:

$$\begin{aligned} dq_t &= p_t dt \\ dp_t &= (-\gamma p_t - \nabla V(q_t))dt + \sqrt{2\gamma T} dB_t. \end{aligned}$$

Exemples

Particule en communication avec un réservoir:
On considère une particle dans un potentiel V. Sa dynamique est déterminée par le Hamiltonien $H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$: $\dot{q} = \partial_p H$, $\dot{p} = -\partial_q H$.

Cette particule est en contact avec un réservoir de chaleur à température $T > 0$, modélisé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck agissant comme un bruit sur le moment p:

$$\begin{aligned} dq_t &= p_t dt \\ dp_t &= (-\gamma p_t - \nabla V(q_t))dt + \sqrt{2\gamma T} dB_t. \end{aligned}$$

Exemples

Chaîne d'oscillateurs en communication avec deux réservoirs à des températures différentes:
La dynamique est déterminée par le Hamiltonien

$$H(p,q) = \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{p_i^2}{2} + V(q)$$

avec $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme

$$\sum_{1 \leq i \leq d} U^{(1)}(q_i) + \sum_{1 \leq i \leq d-1} U^{(2)}(q_i - q_{i+1}).$$

$U^{(1)}$ potentiel de piégeage, $U^{(2)}$ potentiel d'interaction.

Exemples

Les réservoirs de chaleur T_1 et T_d agissent sur les moments des particules 1 et d comme des processus d'Ornstein-Uhlenbeck:

$$\begin{aligned} dq_j(t) &= p_j(t)dt \quad 1 \leq j \leq d \\ dp_1(t) &= (-\gamma p_1(t) - \partial_{q_1} V(q_t))dt + \sqrt{2\gamma T_1} dB_1(t) \\ dp_j(t) &= (-\partial_{q_j} V(q_t))dt \quad 2 \leq j \leq d-1 \\ dp_d(t) &= (-\gamma p_d(t) - \partial_{q_d} V(q_t))dt + \sqrt{2\gamma T_d} dB_d(t). \end{aligned}$$

Sous forme condensée:

$$\begin{cases} dq(t) &= p(t)dt \\ dp(t) &= (-\gamma \Lambda p(t) - \nabla_q V(q(t)))dt + \sqrt{2\gamma T} dB(t) \end{cases}$$

avec $\Lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection $\Lambda(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, x_d)$, $\sqrt{T} : (x_1, x_d) \rightarrow (\sqrt{T_1} x_1, \sqrt{T_d} x_d)$ et $B(t) = (B_1(t), B_d(t))$ un MB de $\mathbb{R}^2$.

Exemples

Les réservoirs de chaleur T_1 et T_d agissent sur les moments des particules 1 et d comme des processus d'Ornstein-Uhlenbeck:

$$
\begin{aligned}
dq_j(t) &= p_j(t)dt \quad 1 \leq j \leq d \\
dp_1(t) &= (-\gamma p_1(t) - \partial_{q_1} V(q_t))dt + \sqrt{2\gamma T_1} dB_1(t) \\
dp_j(t) &= (-\partial_{q_j} V(q_t))dt \quad 2 \leq j \leq d-1 \\
dp_d(t) &= (-\gamma p_d(t) - \partial_{q_d} V(q_t))dt + \sqrt{2\gamma T_d} dB_d(t).
\end{aligned}
$$

Sous forme condensée:

$$
\left\{
\begin{aligned}
dq(t) &= p(t)dt \\
dp(t) &= (-\gamma \Lambda p(t) - \nabla_q V(q(t)))dt + \sqrt{2\gamma T} dB(t)
\end{aligned}
\right.
$$

avec $\Lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^2$ la projection $\Lambda(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, x_d)$, $\sqrt{T} : (x_1, x_d) \to (\sqrt{T_1} x_1, \sqrt{T_d} x_d)$ et $B(t) = (B_1(t), B_d(t))$ un MB de $\mathbb{R}^2$.

Equation de Fokker-Planck cinétique

On considère une particule dans $\mathbb{R}^d$, dont le mouvement est régi par les équations de Newton avec une force provenant d'un potentiel $-\nabla V$, un terme de forçage aléatoire type bruit blanc, un terme de friction de coefficient θ: alors sa position X_t, au temps t, vérifie l'EDS du second ordre

$$\frac{d^2 X_t}{dt^2} = -\nabla V(X_t) + \sqrt{2}\frac{dW_t}{dt} - \frac{dX_t}{dt},$$

où W_t désigne un mouvement brownien standard.

On définit l'EDP associée de la façon suivante: si $f_t(x, v)$ est la densité de probabilité de $(X_t, \dot{X}_t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, alors f est solution de:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\nabla_x f - \nabla V(x) \cdot \nabla_v f = \Delta_v f + \nabla_v \cdot (fv). \qquad (1.1)$$

L'équation (1.1) qui fait apparaître la position mais également la vitesse de la particule est appelée équation cinétique.

Equation de Fokker-Planck cinétique

L'équation (1.1) est une équation fondamentale, notamment en cinétique des gaz. Il existe des variantes non linéaires comme l'équation de Fokker-Planck Vlasov (plasmas, astrophysique, à de très grandes échelles de temps), ...

Hypocoercivité: dans (1.1)
- le terme de gauche est conservatif, il décrit la trajectoire d'un système classique dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ avec hamiltonien $V(x) + |v|^2/2$,
- le terme de droite est un terme de diffusion dégénéré (il n'agit que sur la variable de vitesse v).

Pour un potentiel quadratique on a un unique état d'équilibre global, explicite et gaussien. Il faut considérer la combinaison de x et de v pour avoir une convergence exponentielle vers l'équilibre.

Equation de Fokker-Planck cinétique

L'équation (1.1) est une équation fondamentale, notamment en cinétique des gaz. Il existe des variantes non linéaires comme l'équation de Fokker-Planck Vlasov (plasmas, astrophysique, à de très grandes échelles de temps), ...

Hypocoercivité: dans (1.1)
- le terme de gauche est conservatif, il décrit la trajectoire d'un système classique dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ avec hamiltonien $V(x) + |v|^2/2$,
- le terme de droite est un terme de diffusion dégénéré (il n'agit que sur la variable de vitesse v).

Pour un potentiel quadratique on a un unique état d'équilibre global, explicite et gaussien. Il faut considérer la combinaison de x et de v pour avoir une convergence exponentielle vers l'équilibre.

Equation de Fokker-Planck cinétique

L'équation (1.1) est une équation fondamentale, notamment en cinétique des gaz. Il existe des variantes non linéaires comme l'équation de Fokker-Planck Vlasov (plasmas, astrophysique, à de très grandes échelles de temps), ...

Hypocoercivité: dans (1.1)
- le terme de gauche est conservatif, il décrit la trajectoire d'un système classique dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ avec hamiltonien $V(x) + |v|^2/2$,
- le terme de droite est un terme de diffusion dégénéré (il n'agit que sur la variable de vitesse v).

Pour un potentiel quadratique on a un unique état d'équilibre global, explicite et gaussien. Il faut considérer la combinaison de x et de v pour avoir une convergence exponentielle vers l'équilibre.

Hypocoercivité

Pour un potentiel V plus général, on a encore un équilibre global de la forme suivante:

$$f_\infty(x,v) = \frac{e^{V(x)+\frac{|v|^2}{2}}}{c_\infty},$$

où c_∞ est une constante de normalisation.

Questions:
- est-ce qu'on a convergence vers l'équilibre?
- à quelle vitesse?

Si on se place dans un cas d'ergodicité avec convergence exponentielle vers l'équilibre, est-il possible d'estimer la densité de probabilité stationnaire?

Objectifs

Soit $\left(Z_t := (X_t, Y_t) \in \mathbb{R}^{2d}\ ,\ t \geq 0\right)$ gouverné par le système:

$$\begin{cases} dX_t &= Y_t dt \\ dY_t &= \sigma dW_t - \left(c(X_t, Y_t)Y_t + \nabla V(X_t)\right) dt \end{cases}$$

où la fonction c est appelée force d'amortissement, V le potentiel, σ est une constante strictement positive et W est un mouvement brownien standard.

hypothèses:
- pour tout état initial $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2d}$, existence et unicité d'une solution faible non explosive,
- ergodicité du processus.

On suppose également:
- que la convergence dans le théorème ergodique est "assez rapide",
- que l'unique probabilité invariante μ admet une densité p_s par rapport à Lebesgue.

Plan de l'exposé

Objectifs

On souhaite estimer la densité invariante $p_s : (x, y) \in \mathbb{R}^{2d} \to p_s(x, y)$.

Cadre d'observations partielles:
on suppose de plus qu'on ne dispose que d'observations partielles (incomplètes): on ne dispose pas des observations de la vitesse y_t.

Estimateur à noyau

$$\hat{p}_s(x, y) := \frac{1}{n b_{1,n}^d b_{2,n}^d} \sum_{k=1}^{n} K\left(\frac{x - X_{ih_n}}{b_{1,n}}, \frac{y - \frac{X_{i+1)h_n} - X_{ih_n}}{h_n}}{b_{2,n}}\right).$$

Plan de l'exposé

Comportement en temps long, coercivité et mélange

Wu (2000), Bakry, Cattiaux & Guillin (2008), Villani (2009)

Hypothèses $\mathcal{H}_1$

(i) le potentiel V est borné inférieurement, C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, V et ∇V ont une croissance polynômiale à l'infini et

$$+\infty \geq \liminf_{|x| \to +\infty} \frac{x \cdot \nabla V(x)}{|x|} \geq v > 0 \quad \text{(condition de drift)},$$

(ii) le coefficient d'amortissement $c(x, y)$ est C^∞ et borné, et il existe c, $L > 0$ t.q. $c^s(x, y) \geq cId > 0$, $\forall (|x| > L, y \in \mathbb{R}^d)$.

Sous ces hypothèse on a l'existence d'une fonction de Lyapunov $\psi \geq 1$

$$L\psi \leq -\alpha\psi + b\mathbb{I}_K$$

pour des constantes α, $b > 0$ et un compact K.

Le générateur infinitésimal L s'écrit

$$L = \frac{\sigma^2}{2}\Delta_y + y\nabla_x - (c(x, y)y + \nabla V) \cdot \nabla_y \,.$$

Comportement en temps long, coercivité et mélange

Wu (2000), Bakry, Cattiaux & Guillin (2008), Villani (2009)

Hypothèses $\mathcal{H}_1$

(i) le potentiel V est borné inférieurement, C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, V et ∇V ont une croissance polynômiale à l'infini et

$$+\infty \geq \liminf_{|x|\to+\infty} \frac{x\cdot\nabla V(x)}{|x|} \geq v > 0 \quad \text{(condition de drift)},$$

(ii) le coefficient d'amortissement $c(x,y)$ est C^∞ et borné, et il existe c, $L > 0$ t.q. $c^s(x,y) \geq cId > 0$, $\forall\,(|x| > L,\ y \in \mathbb{R}^d)$.

Sous ces hypothèsse on a l'existence d'une fonction de Lyapunov $\psi \geq 1$

$$L\psi \leq -\alpha\psi + b\mathbb{I}_K$$

pour des constantes α, $b > 0$ et un compact K.

Le générateur infinitésimal L s'écrit

$$L = \frac{\sigma^2}{2}\Delta_y + y\nabla_x - (c(x,y)y + \nabla V)\cdot\nabla_y\,.$$

Comportement en temps long, coercivité et mélange

Propriétés:
- pas d'explosion,
- le processus est récurrent positif et admet une unique mesure de probailité invariante μ.

Vers la coercivité et le mélange:

On note $P_t f(z) = \mathbb{E}_z(f(Z_t))$ pour f bornée. $\psi \in \mathbb{L}^1(\mu)$.

Il existe $D > 0$ et $\rho < 1$ t.q. pour tout z, pour toute fonction f t.q. $\sup_z \frac{|f(z)|}{\psi(z)} < +\infty$,

$$\left| P_t f(z) - \int f d\mu \right| \leq D \sup_a \left(\frac{|f(a) - \int f d\mu]}{\psi(a)} \right) \psi(z) \rho^t.$$

On en déduit que $(Z_t := (X_t, Y_t), t \geq 0)$ est β-mélangeant.

Comportement en temps long, coercivité et mélange

Propriétés:
- pas d'explosion,
- le processus est récurrent positif et admet une unique mesure de probailité invariante μ.

Vers la coercivité et le mélange:

On note $P_t f(z) = \mathbb{E}_z(f(Z_t))$ pour f bornée. $\psi \in \mathbb{L}^1(\mu)$.

Il existe $D > 0$ et $\rho < 1$ t.q. pour tout z, pour toute fonction f t.q. $\sup_z \frac{|f(z)|}{\psi(z)} < +\infty$,

$$\left| P_t f(z) - \int f d\mu \right| \leq D \sup_a \left(\frac{|f(a) - \int f d\mu]}{\psi(a)} \right) \psi(z) \rho^t.$$

On en déduit que $(Z_t := (X_t, Y_t)\,,\ t \geq 0)$ est β-mélangeant.

Propriétés locales, hypoellipticité

L s'écrit aussi sous forme "Stratonovich"

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^{d} L_i^2 + L_0$$

avec les champs de vecteurs L_j définis par

(1) pour $1 \leq i \leq d$, $L_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$,

(2)
$$L_0 = \sum_{k=1}^{d} y_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{d} \left((c(x,y)y)_k + \frac{\partial V}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_k} .$$

On en déduit que

$$[L_i, L_0] = L_i L_0 - L_0 L_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial((c(x,y)y)_k)}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_k}$$

et donc que $\{L_i,\ 1 \leq i \leq d;\ [L_i, L_0],\ 1 \leq i \leq d\}(z)$ génère $\mathbb{R}^{2d}$ tout entier, pour chaque z.

Propriétés locales, hypoellipticité

L s'écrit aussi sous forme "Stratonovich"

$$L = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^{d} L_i^2 + L_0$$

avec les champs de vecteurs L_j définis par

(1) pour $1 \leq i \leq d$, $L_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$,

(2)
$$L_0 = \sum_{k=1}^{d} y_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{d} \left((c(x,y)y)_k + \frac{\partial V}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

On en déduit que

$$[L_i, L_0] = L_i L_0 - L_0 L_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial((c(x,y)y)_k)}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_k}$$

et donc que $\{L_i,\ 1 \leq i \leq d;\ [L_i, L_0],\ 1 \leq i \leq d\}(z)$ génère $\mathbb{R}^{2d}$ tout entier, pour chaque z.

Propriétés locales, hypoellipticité

$\Rightarrow$ hypoellipticité par le théorème de Hörnander.

Conséquence: $\forall z$, $\forall t > 0$,
la loi $P_t(z, \cdot)$ du processus Z_t partant de z à l'instant 0 a une densité C^∞ $p_t(z, \cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

On a alors $\mu(dz) = p_s(z)dz$ avec p_s C^∞.

Comportement de $p_t(z, \cdot)$ pour des petites valeurs de t?

Exemple pour mieux comprendre: $d = 1$, $c = V = 0$. Alors Z_t est un vecteur gaussien de dimension deux, de moyenne $(x_0 + y_0 t, y_0)$ et de matrice de covariance

$$\mathrm{Var}(X_t) = \frac{t^3}{3},\ \mathrm{Var}(Y_t) = t,\ \mathrm{Cov}(X_t, Y_t) = \frac{t^2}{2}.$$

On a

$$p_t(z, z) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{y_0^2}{6\,t}} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{2\pi}\frac{1}{t}$$

qui est l'explosion classique pour le mouvement brownien.

Propriétés locales, hypoellipticité

$\Rightarrow$ hypoellipticité par le théorème de Hörnander.

Conséquence: $\forall\, z, \forall\, t > 0$,
la loi $P_t(z, \cdot)$ du processus Z_t partant de z à l'instant 0 a une densité C^∞ $p_t(z, \cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

On a alors $\mu(dz) = p_s(z)dz$ avec p_s C^∞.

Comportement de $p_t(z, \cdot)$ pour des petites valeurs de t?

Exemple pour mieux comprendre: $d = 1$, $c = V = 0$. Alors Z_t est un vecteur gaussien de dimension deux, de moyenne $(x_0 + y_0 t, y_0)$ et de matrice de covariance

$$\mathrm{Var}(X_t) = \frac{t^3}{3},\ \mathrm{Var}(Y_t) = t,\ \mathrm{Cov}(X_t, Y_t) = \frac{t^2}{2}.$$

On a

$$p_t(z, z) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{1}{t^2}\, e^{-\frac{y_0^2}{6\,t}} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{2\pi}\frac{1}{t}$$

qui est l'explosion classique pour le mouvement brownien.

Propriétés locales, hypoellipticité

Théorème (Konakov, Menozzi & Molchanov, 2010)

On considère le système suivant

$$\begin{aligned} dX_t &= Y_t dt \\ dY_t &= \sigma\, dW_t + b(X_t, Y_t)dt\,, \end{aligned}$$

où b set supposé C^∞, borné, à dérivées bornées. Soit $T > 0$. Alors $\forall\, z = (x, y)$, $\forall\, t > 0$, la loi de $Z_t = (X_t, Y_t)$ a une densité $q_t(z, .)$ par rapport à la mesure de Lebesgue et $\exists\, C\,,\ C' > 0$ t.q. pour $0 < t < T$,

$$q_t(z, z') \leq C' \frac{1}{t^{2d}} \exp\left(-C \left[\frac{|y - y'|^2}{4t} + \frac{3\left|x' - x - \frac{t(y+y')}{2}\right|^2}{t^3}\right]\right).$$

De plus, $\exists\, t_0 > 0\,,\ \exists\, C'' > 0$ t.q. $\forall\, 0 < t < t_0$,

$$q_t\left((x, y)\,, (x + ty, y)\right) \geq C'' \frac{1}{t^{2d}}\,.$$

Propriétés locales, hypoellipticité

Corollaire (Cattiaux, León & P., 2012)

On ne suppose plus le drift borné, à dérivées bornées.
$\forall z$, *pour tout voisinage ouvert borné* U *de* z, *on peut écrire*

$$p_t(z,\cdot) = q_t(z,\cdot) + r_t(z,\cdot)$$

où $q_t(z,z')$ *satisfait la borne de Konakov et al. pour* $z' \in U$, *et* r_t *satisfait:* $\forall f$ *bornée à support compact* $K \subset U$,

$$\int f(z')r_t(z,z')dz' \leq D(U)e^{-\frac{D'(U)}{t}}\|f\|_\infty,$$

où $D(U)$ *et* $D'(U)$ *sont des constantes* > 0.

Remarque

Avec un argument de localisation, on peut montrer $\forall z' \in U$, $\forall 0 < t < T$

$$p_t(z,z') \leq q_t(z,z') + C(U)e^{-\frac{C'(U)}{t}}.$$

Propriétés locales, hypoellipticité

Comportement de $p_t(z,\cdot)$ en temps long? [Cattiaux, 1990]

$\forall\,(z,z'),\ \exists\, 0 < C(z')\ t.q.\ \forall\, t \geq 0$

$$p_t(z,z') \leq C(z') < +\infty.$$

Dans la suite, nous supposerons que les hypothèses $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$ sont vérifiées et donc que toutes ces bonnes propriétés sont acquises !

Plan de l'exposé

Estimation de la densité invariante

Observations complètes:

$$\check{p}_s(x,y) := \frac{1}{nb_{1,n}^d b_{2,n}^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{b_{1,n}}, \frac{y - Y_i}{b_{2,n}}\right).$$

Ici on suppose qu'on n'observe pas la composante y.

Observations incomplètes: pas de discrétisation h_n

$$\hat{p}_s(x,y) := \frac{1}{nb_{1,n}^d b_{2,n}^d} \sum_{i=1}^{n-1} K\left(\frac{x - X_{ih_n}}{b_{1,n}}, \frac{y - \frac{X_{(i+1)h_n} - X_{ih_n}}{h_n}}{b_{2,n}}\right).$$

On choisit un noyau $K : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}_+$ de classe C^2, à support compact avec $\int K(x,y)dxdy = 1$. On suppose de plus $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ t.q. pour tout polynôme non ct $P(x,y)$ de degré $\leq m$, $\int P(u,v)K(u,v)dudv = 0$.

Estimation de la densité invariante

Observations complètes:

$$\check{p}_s(x,y) := \frac{1}{nb_{1,n}^d b_{2,n}^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{b_{1,n}}, \frac{y-Y_i}{b_{2,n}}\right).$$

Ici on suppose qu'on n'observe pas la composante y.

Observations incomplètes: pas de discrétisation h_n

$$\hat{p}_s(x,y) := \frac{1}{nb_{1,n}^d b_{2,n}^d} \sum_{i=1}^{n-1} K\left(\frac{x-X_{ih_n}}{b_{1,n}}, \frac{y-\frac{X_{(i+1)h_n}-X_{ih_n}}{h_n}}{b_{2,n}}\right).$$

On choisit un noyau $K : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}_+$ de classe C^2, à support compact avec $\int K(x,y)dxdy = 1$. On suppose de plus $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ t.q. pour tout polynôme non ct $P(x,y)$ de degré $\leq m$, $\int P(u,v)K(u,v)dudv = 0$.

Estimation de la densité invariante

Observations complètes:

$$\check{p}_s(x,y) := \frac{1}{nb_{1,n}^d b_{2,n}^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{b_{1,n}}, \frac{y - Y_i}{b_{2,n}}\right).$$

Ici on suppose qu'on n'observe pas la composante y.

Observations incomplètes: pas de discrétisation h_n

$$\hat{p}_s(x,y) := \frac{1}{nb_{1,n}^d b_{2,n}^d} \sum_{i=1}^{n-1} K\left(\frac{x - X_{ih_n}}{b_{1,n}}, \frac{y - \frac{X_{(i+1)h_n} - X_{ih_n}}{h_n}}{b_{2,n}}\right).$$

On choisit un noyau $K : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}_+$ de classe C^2, à support compact avec $\int K(x,y)dxdy = 1$. On suppose de plus $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ t.q. pour tout polynôme non ct $P(x,y)$ de degré $\leq m$, $\int P(u,v)K(u,v)dudv = 0$.

Estimation de la densité invariante

(i) $b_{1,n}$, $b_{2,n}$ et $h_n \to 0$, (ii) $n\, b_{1,n}^d\, b_{2,n}^d \to +\infty$, (iii) $\frac{b_{1,n}\, b_{2,n}}{h_n^2} \to 0$,

(iv) m est t.q. $n\, b_{1,n}^d\, b_{2,n}^d \, \max(b_{1,n}, b_{2,n})^{2(m+1)} \to 0$,

(v) $nh_n \frac{b_{1,n}^d}{b_{2,n}^{2+d}} \to 0$,

(vi) $\exists\, 1 < p$ t.q. $n\, h_n^2 \frac{b_{1,n}^{d(2-p)/p}}{b_{2,n}^{2+d}} \to 0$,

(vii) $\frac{\sqrt{b_{1,n}^d b_{2,n}^d}}{\sqrt{n} h_n^{3d}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème (Cattiaux, León & Prieur, 2012)

Soit $z_0 \in \mathbb{R}^{2d}$. On construit notre estimateur en prenant $Z_0 = z_0$, alors $\forall\, z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2d}$.

$$\sqrt{nb_{1,n}^d b_{2,n}^d}\,(\hat{p}_s(x,y) - p_s(x,y)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, p_s(x,y)\int K^2(s,t)dsdt\right).$$

Estimation de la densité invariante

Schéma de démonstration:

1) on introduit

$$\tilde{p}_s(x,y) := \frac{1}{n b_{1,n}^d b_{2,n}^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_{ih_n}}{b_{1,n}}, \frac{y - Y_{ih_n}}{b_{2,n}}\right),$$

2) on montre le théorème limite central pour l'estimateur intermédiaire, en régime stationnaire,

3) on montre que le reste tend vers zéro en norme $\mathbb{L}^2$.

4) Pour les étapes 1) à 3) on a négligé le terme de biais, qu'il reste donc à contrôler à la fin.

5) On montre qu'on n'a pas besoin de partir du régime stationnaire, on peut partir de n'importe quel point z au temps initial.

Estimation de la densité invariante

Points 1) et 2) on va montrer un tlc triangulaire pour des tableaux mélangeants.

Soit $S_n = Z_{n,1} + \ldots + Z_{n,k_n}$, avec $k_n \to +\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(Z_{n,k})_{k\geq 1}$ une suite stationnaire centrée vérifiant $\mathbb{E}(Z_{n,j}Z_{n,0}) \leq \alpha_n(j)$ pour une suite de réels positifs $(\alpha_n(j))_{n\in\mathbb{N}^*,\, 1\leq j\leq k_n-1}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, 1 \leq k \leq k_n$, on définit $S_{k,n} = Z_{n,1} + \ldots + Z_{n,k}$. On suppose alors $\exists\, \gamma, \beta > 0$ t.q.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var} S_n = \gamma^2 > 0 \text{ et } v_{n,k} = \mathrm{Var} S_{k,n} - \mathrm{Var} S_{k-1,n} \geq \frac{\beta}{n}.$$

On note

$$M_n = \sup_{1\leq k\leq k_n} \|Z_{n,k}\|_\infty \,,\ \delta_n = \sup_{1\leq k\leq k_n} \mathbb{E}(|Z_{n,k}|)$$

$$\Delta_{n,j} = \mathbb{E}\left(|Z_{n,0}Z_{n,j}|\right).$$

Estimation de la densité invariante

Théorème (Cattiaux, León & P., 2012; Coulon-Prieur & Doukhan, 2000)

$$Si\ (k_n M_n + k_n^{\frac{2}{3}}) M_n \delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad k_n^{2/3} \sum_{j=1}^{k_n-1} \min(\alpha_n(j), \Delta_{n,j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

$$(1+M_n) \sum_{j=1}^{k_n-1} (k_n - j) \min(\alpha_n(j), (\Delta_{n,j} + \delta_n^2)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors on a

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,\gamma^2) \ .$$

On pose

$$Z_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n b_{1,n}^d b_{2,n}^d}} \left\{ K\left(\frac{x - X_{kh_n}}{b_{1,n}}, \frac{y - Y_{kh_n}}{b_{2,n}}\right) - \mathbb{E} K\left(\frac{x - X_0}{b_{1,n}}, \frac{y - Y_0}{b_{2,n}}\right)\right\}.$$

Estimation de la densité invariante

Principale difficulté: le pas de discrétisation h_n tend vers zéro et la densité jointe de (Z_0, Z_{jh_n}) explose pour notre diffusion. On peut conclure l'étape 1) sous les hypothèsse (i), (ii) et (iii).

Point 3): Pour cette étape on exploite "finement" les hypothèsse de régularité des coefficients de la diffusion et du noyau K. On peut conclure cette étape si on rajoute les hypothèses (v) et (vi).

Point 4): Le terme de biais ne dépend pas des propriétés de mélange. On utilise la régularité de p_s qui est C^∞ et les hypothèses sur le noyau K. Il faut alors rajouter l'hypothèse (iv).

Point 5): On utilise la convergence à vitesse exponentielle vers la mesure stationnaire.

Estimation de la densité invariante

Principale difficulté: le pas de discrétisation h_n tend vers zéro et la densité jointe de (Z_0, Z_{jh_n}) explose pour notre diffusion. On peut conclure l'étape 1) sous les hypothèsse (i), (ii) et (iii).

Point 3)**:** Pour cette étape on exploite "finement" les hypothèsse de régularité des coefficients de la diffusion et du noyau K. On peut conclure cette étape si on rajoute les hypothèses (v) et (vi).

Point 4)**:** Le terme de biais ne dépend pas des propriétés de mélange. On utilise la régularité de p_s qui est C^∞ et les hypothèses sur le noyau K. Il faut alors rajouter l'hypothèse (iv).

Point 5)**:** On utilise la convergence à vitesse exponentielle vers la mesure stationnaire.

Estimation de la densité invariante

Principale difficulté: le pas de discrétisation h_n tend vers zéro et la densité jointe de (Z_0, Z_{jh_n}) explose pour notre diffusion. On peut conclure l'étape 1) sous les hypothèsse (i), (ii) et (iii).

Point 3): Pour cette étape on exploite "finement" les hypothèsse de régularité des coefficients de la diffusion et du noyau K. On peut conclure cette étape si on rajoute les hypothèses (v) et (vi).

Point 4): Le terme de biais ne dépend pas des propriétés de mélange. On utilise la régularité de p_s qui est C^∞ et les hypothèses sur le noyau K. Il faut alors rajouter l'hypothèse (iv).

Point 5): On utilise la convergence à vitesse exponentielle vers la mesure stationnaire.

Estimation de la densité invariante

Principale difficulté: le pas de discrétisation h_n tend vers zéro et la densité jointe de (Z_0, Z_{jh_n}) explose pour notre diffusion. On peut conclure l'étape 1) sous les hypothèsse (i), (ii) et (iii).

Point 3)**:** Pour cette étape on exploite "finement" les hypothèsse de régularité des coefficients de la diffusion et du noyau K. On peut conclure cette étape si on rajoute les hypothèses (v) et (vi).

Point 4)**:** Le terme de biais ne dépend pas des propriétés de mélange. On utilise la régularité de p_s qui est C^∞ et les hypothèses sur le noyau K. Il faut alors rajouter l'hypothèse (iv).

Point 5)**:** On utilise la convergence à vitesse exponentielle vers la mesure stationnaire.

Plan de l'exposé

Etude numérique

Oscillateur harmonique:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_t & = & Y_t dt \\ dY_t & = & dW_t - 2(Y_t + X_t)dt \end{array} \right.$$

On a alors

$$p_s(x,y) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \exp(-4x^2 - 2y^2).$$

On utilise un schéma d'Euler explicite pour simuler une discrétisation $(\widetilde{X}_i, \widetilde{Y}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \widetilde{X}_{i+1} - \widetilde{X}_i & = & \widetilde{Y}_i \delta \\ \widetilde{Y}_{(i+1)} - \widetilde{Y}_i & = & (W_{(i+1)\delta} - W_{i\delta}) - 2(\widetilde{Y}_i + \widetilde{X}_i)\delta \end{array} \right.$$

avec $(\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0) = (0,0)$. On prend le pas $\delta = \frac{1}{10} h_n$.

Etude numérique

On prend $b_{1,n} = n^{-\alpha_1} = n^{-0.92}$, $b_{2,n} = n^{-\alpha_2} = n^{-0.02}$ et $h_n = n^{-\gamma} = n^{-0.15}$. On choisit alors le noyau d'Epanechnikov

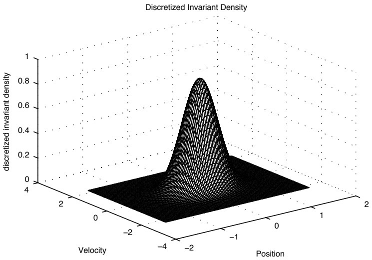
$$K(u,v) = \frac{3}{4}(1-u^2)\mathbf{I}_{|u|\leq 1} \times \frac{3}{4}(1-v^2)\mathbf{I}_{|v|\leq 1}.$$

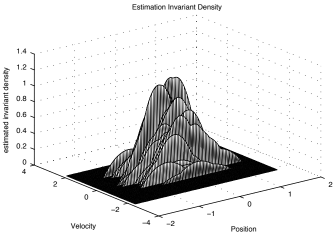
n	100	1000	10000
error	0.2098	0.1412	0.1276

Table: Evolution de l'erreur quadratique moyenne intégrée pour $\alpha_1 = 0.92$, $\alpha_2 = 0.02$, $\gamma = 0.15$, $L = 100$ et $M = 30$ et différentes tailles d'échantillon

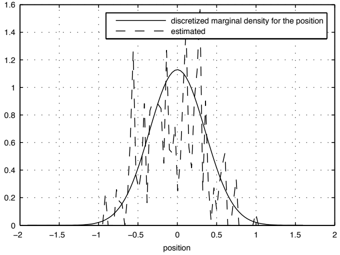
L'erreur quadratique moyenne a été estimée avec $M = 30$ répétitions, sur une grille de $L = 100$ points.

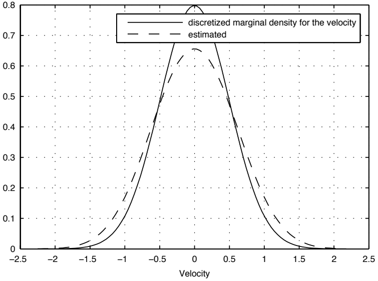
Etude numérique



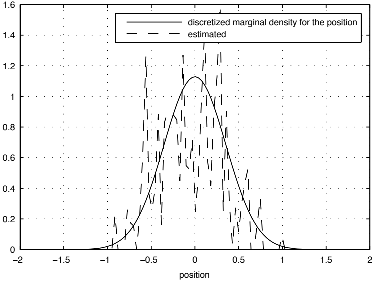


Etude numérique





Etude numérique



L'estimation pour la position est très bruitée, celà vient du choix de α_1, contraint par les hypothèsse entre h_n et les paramètres de fenêtre.

Etude numérique

Oscillateur de Kramers:

$$\begin{cases} dX_t &= Y_t dt \\ dY_t &= dW_t - (Y_t + X_t^3 - X_t)dt \end{cases}$$

Le potentiel est alors $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et

$$p_s(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{x^4}{2} + x^2 - y^2).$$

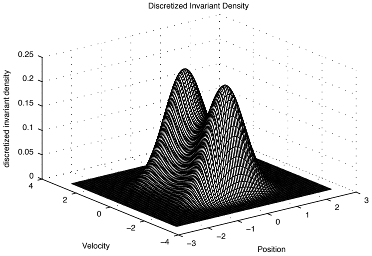
On utilise encore un schéma d'Euler explicite pour simuler une discrétisation $(\widetilde{X}_i, \widetilde{Y}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(X_t, Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec pas $\delta = \frac{1}{10}h_n$.

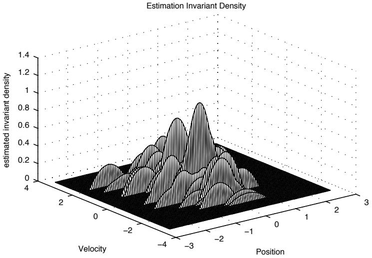
Etude numérique

n	100	1000	5000
error	0.0953	0.0881	0.0751

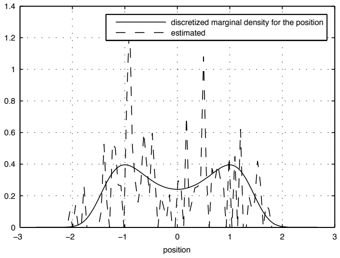
Table: Evolution de l'erreur quadratique moyenne intégrée pour $\alpha_1 = 0.92$, $\alpha_2 = 0.02$, $\gamma = 0.15$, $L = 100$ et $M = 30$ et différentes tailles d'échantillon

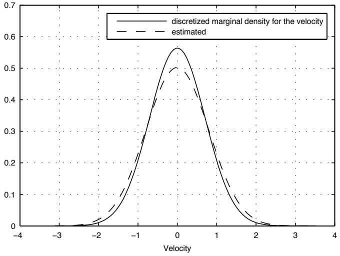
Etude numérique





Etude numérique





Conclusion, perspectives

Conclusion : on a obtenu un estimateur non paramétrique de la densité invariante de diffusions hypoelliptiques, dans le cadre d'observations partielles. Pour cet estimateur, on obtient un théorème de la limite centrale. On a des conditions obtenues par majoration, quid de l'optimalité?

Travail soumis.
`http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00739136`

Perspectives :

- complexifier les systèmes pour approcher au mieux les problèmes environnementaux (Fokker-Planck non linéaires, modèles confinés, variances dégénérées, . . .),
- estimation du terme de drift (en cours, premiers résultats pour des données "très" haute fréquence),
- estimation du terme de volatilité (en cours, premiers résultats lorsque la variance est constante, non dégénérée).

Conclusion, perspectives

Conclusion : on a obtenu un estimateur non paramétrique de la densité invariante de diffusions hypoelliptiques, dans le cadre d'observations partielles. Pour cet estimateur, on obtient un théorème de la limite centrale. On a des conditions obtenues par majoration, quid de l'optimalité?

Travail soumis.
`http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00739136`

Perspectives :

- complexifier les systèmes pour approcher au mieux les problèmes environnementaux (Fokker-Planck non linéaires, modèles confinés, variances dégénérées, . . .),
- estimation du terme de drift (en cours, premiers résultats pour des données "très" haute fréquence),
- estimation du terme de volatilité (en cours, premiers résultats lorsque la variance est constante, non dégénérée).

Références

[Bakry, Cattiaux and Guillin, 2008]
Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes : Lyapunov versus Poincaré. *J. Func. Anal.* **254**, p. 727-759.

[Cattiaux, Chafai and Guillin, 2011]
Central Limit Theorem for ergodic Markov Diffusions. To appear in ALEA. Available at ArXiv 1104.2198 math[pr].

[Coulon-Prieur and Doukhan, 2000]
A CLT for triangular arrays of weakly dependent sequences. *Statist. Probab. Letters* **47**, p. 61-68 (2000).

[Down, Meyn and Tweedie, 1995]
Exponential and uniform ergodicity of Markov processes. *Ann. Prob.*, **23(4)**, p. 1671-1691.

[Konakov, Menozzi and Molchanov, 2010]
Explicit parametrix and local limit theorems for some degenerate diffusion processes. *Ann. Institut Henri Poincaré* **46 (4)**, p. 908-923.

Références

[Pokern, Stuart and Wiberg, 2009]
Parameter estimation for partially observed hypoelliptic diffusions. *J. Roy. Stat. Soc. B* **71**, p. 49-73.

[Samson and Thieullen, 2012]
Contrast estimator for completely or partially observed hypoelliptic diffusion. *Stochastic Processes and their Applications,*
http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2012.04.006.

[Villani, 2009]
Hypocoercivity. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 202(950).

[Wu, 2001]
Large and moderate deviations and exponential convergence for stochastic damping Hamiltonian systems. *Stochastic Processes and their Applications* **91**, p. 205-238.