Théorèmes limite pour des tableaux triangulaires de fonctionnelles de vecteurs gaussiens et applications statistiques à des processus non stationnaires

Papier joint avec Donatas Surgailis (Lituanie)

Jean-Marc Bardet
bardet@univ-paris1.fr

SAMM, Université Paris 1

25 Octobre 2012, Journées JSTAR Rennes

Plan

Plan

Le cas indépendant

On note:

- $\mathbf{X}$ un vecteur gaussien standardisé dans $\mathbb{R}^\nu$, où $\nu \in \mathbb{N}^*$.
- $\mathbb{L}^2(\mathbf{X})$ la classe des fonctions $f : \mathbb{R}^\nu \mapsto \mathbb{R}$ mesurables telles que $\mathbb{E}f(\mathbf{X}) = 0$ et $\mathbb{E}f^2(\mathbf{X}) < \infty$.
- $\overline{x}_N = \frac{1}{N}(x_1 + \cdots + x_N)$ pour $N \in \mathbb{N}^*$.

Théorème (TLC "classique")

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbf{X})$ et soit $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs gaussiens standardisés indépendants. Alors:

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\left[f(\mathbf{X}_1) + \cdots + f(\mathbf{X}_N)\right]\right) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\mathbb{E}f^2(\mathbf{X})\right).$$

Le cas indépendant pour des tableaux triangulaires

Exemple de tableaux triangulaires: modèle linéaire $Y_i = (Z\theta)_i + \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq N$. Les résidus $(\widehat{\varepsilon}_i^{(N)})_{1 \leq i \leq N} = P_{[Z]^\perp} Y$ obtenus par OLS forment un tableau triangulaire

Théorème (TLC pour les tableaux triangulaires indépendants)

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbf{X})$ et soit $(\mathbf{X}_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n,\, n \in \mathbb{N}^*}$ un tableau triangulaire de vecteurs gaussiens standardisés indépendants. Alors:

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\left[f\left(\mathbf{X}_1^{(N)}\right) + \cdots + f\left(\mathbf{X}_N^{(N)}\right)\right]\right) \xrightarrow[N \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\, \mathbb{E}f^2(\mathbf{X})\right).$$

Dépendance pour des vecteurs gaussiens

- Si $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de vecteurs gaussiens standardisés
  $\Longrightarrow$ la dépendance est déterminée par la famille des covariances

$$\big(\mathrm{Cov}\big(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j\big)\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}=(\mathrm{Cov}(X_i^{p)},X_j^{(q)}))_{(p,q)\in\{1,\cdots,\nu\}^2,(i,j)\in\mathbb{N}^2}.$$

- Si $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de vecteurs gaussiens standardisés stationnaire
  $\Longrightarrow$ la dépendance est déterminée par la famille des covariances

$$\big(\mathrm{Cov}\big(\mathbf{X}_0,\mathbf{X}_i\big)\big)_{i\in\mathbb{N}}=(\mathrm{Cov}(X_0^{p)},X_j^{(q)}))_{(p,q)\in\{1,\cdots,\nu\}^2,i\in\mathbb{N}}.$$

- Et pour $(f(\mathbf{X}_i))_{i\in\mathbb{N}}$???

Un passage par les polynômes d'Hermite

- Soit $H_k(x) := (-1)^k \mathrm{e}^{x^2/2} \dfrac{\partial^k}{\partial x^k} \mathrm{e}^{-x^2/2}$, $k \in \mathbb{N}$ polynômes d'Hermite standards.
- Pour tout multi-indice

$$\mathbf{k} = (k^{(1)}, \dots, k^{(\nu)}) \in \mathbb{Z}_+^\nu := \{(j^{(1)}, \dots, j^{(\nu)}) \in \mathbb{Z}^\nu, j^{(u)} \geq 0 \ (1 \leq u \leq \nu)\},$$

le polynôme d'Hermite d'ordre $\mathbf{k}$ dans $\mathbb{R}^\nu$ est

$$H_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = H_{k^{(1)}}(x^{(1)}) \times \cdots \times H_{k^{(\nu)}}(x^{(\nu)}) \qquad \text{pour } \mathbf{x} = (x^{(1)}, \cdots, x^{(\nu)}) \in \mathbb{R}^\nu.$$

- On note $|\mathbf{k}| := k^{(1)} + \cdots + k^{(\nu)}$ pour $\mathbf{k} = (k^{(1)}, \dots, k^{(\nu)}) \in \mathbb{Z}_+^\nu$.
Une fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mathbf{X})$ a un rang d'Hermite $m \geq 0$ si

$$\begin{cases} \mathbb{E}\big[f(\mathbf{X}) H_{\mathbf{k}}(\mathbf{X})\big] = 0 & \text{pour tout } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^\nu, |\mathbf{k}| < m, \\ \mathbb{E}\big[f(\mathbf{X}) H_{\mathbf{k}}(\mathbf{X})\big] \neq 0 & \text{pour un } \mathbf{k}, |\mathbf{k}| = m. \end{cases}$$

Un passage par les polynômes d'Hermite (suite)

Proposition

Si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbf{X})$ a un rang d'Hermite $m \geq 0$, f admet le développement d'Hermite

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \geq m} \frac{\mathbb{E}\big[f(\mathbf{X}) H_{\mathbf{k}}(\mathbf{X})\big]}{k^{(1)}! \dots k^{(\nu)}!} H_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),$$

qui converge dans $\mathbb{L}^2(\mathbf{X})$.

Propriété (Formule du Diagramme, Breuer et Major (1983))

Diagramme d'ordre $(\ell_1, \cdots, \ell_p)$: ensemble de sommets $\big\{(j,\ell)_{1 \leq j \leq p,\, 1 \leq \ell \leq \ell_j}\big\}$ et d'arêtes $\big\{\big((j,\ell),(k,m)\big)_{1 \leq j < k \leq p,\, 1 \leq \ell \leq \ell_j,\, 1 \leq m \leq \ell_k}\big\}$. On note $\Gamma(\ell_1, \cdots, \ell_p)$ l'ensemble des diagrammes d'ordre $(\ell_1, \cdots, \ell_p)$. Alors:

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{p} H_{\ell_j}(X^{(j)})\Big] = \sum_{G \in \Gamma(\ell_1, \cdots, \ell_p)} \prod_{((j,\ell),(k,m)) \text{ arêtes de } G} Cov(X^{(j)}, X^{(k)}).$$

Un passage par les polynômes d'Hermite (fin)

En conséquence:

- $\mathbb{E}\big[\prod_{j=1}^p f(\mathbf{X}_j)\big]$ dépend uniquement de $(\mathrm{Cov}(X_i^{p)},X_j^{(q)}))_{1\le p,q\le \nu, 1\le i,j\le p}$.

  Par exemple, si $\nu=1$, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ stationnaire et si le rang d'Hermite de f est $m\geq 0$,
  $$\mathrm{Cov}\big(f(X_i),f(X_j)\big)=\sum_{q=m}^{\infty}\frac{\big(\mathbb{E}\big[f(X)H_q(X)\big]\big)^2}{q!}\,\mathrm{Cov}^q(X_0,X_{|j-i|}).$$

- Les conditions pour un TLC portant sur les $f(\mathbf{X}_i)$ dépendent uniquement du rang d'Hermite m de f et de $(\mathrm{Cov}(X_i^{p)},X_j^{(q)}))_{1\le p,q\le \nu, 1\le i,j\le p}$.

TLC pour des fonctions de vecteurs gaussiens faiblement dépendants

1. Cas des fonctions de processus gaussiens stationnaires: Sun (1965), Breuer et Major (1981), Giraitis et Surgailis (1985), Nourdin *et al.* (2010)

Théorème

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire de variables gaussiennes standardisées, si $r(k)=Cov(X_0,X_k)$ pour $k\in\mathbb{N}$, si $f\in\mathbb{L}^2(X)$ de rang d'Hermite $m\geq 1$, alors

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}|r(k)|^m<\infty \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}f(X_j)\ \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}}\ \mathcal{N}\Big(0\,,\sum_{k\in\mathbb{Z}}Cov(f(X_0),f(X_k))\Big).$$

1. Cas des fonctions de suites de vecteurs gaussiens stationnaires: Arcones (1994)

Théorème

Si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbf{X})$ *de rang d'Hermite* $m \geq 1$ *et* $\max_{1 \leq p,q \leq \nu} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| Cov(X_0^{(p)}, X_k^{(q)}) \right|^m < \infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} f(\mathbf{X}_j) \xrightarrow[N \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0\,,\, \sum_{k \in \mathbb{Z}} Cov(f(\mathbf{X}_0), f(\mathbf{X}_k))\Big).$$

Exemple: $\mathbf{X}$ processus ARMA ou VARMA (standards).

TLC pour des fonctions de vecteurs gaussiens fortement dépendants

1. Cas des suites de vecteurs gaussiens stationnaires: Rosenblatt(1961), Taqqu (1975), Breuer et Dobrushin (1979), Giraitis et Surgailis (1985),

Théorème

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire de variables gaussiennes standardisées, si $f \in \mathbb{L}^2(X)$ de rang d'Hermite $m \geq 1$, si $r^{(p,q)}(k) = Cov(X_0^{(p)}, X_k^{(p)})$ pour $k \in \mathbb{N}$ telle qu'il existe $0 < \alpha < 1$, $(b_{p,q})$ des réels et $L(\cdot)$ une fonction à variations lentes, vérifiant: $r^{(p,q)}(k) = b_{p,q}k^{-\alpha}L(k)$, alors

$$\alpha < \frac{1}{m} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{N^{1-m\alpha/2}L^{m/2}(N)} \sum_{j=1}^{N} f(\mathbf{X}_j) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} Z.$$

Exemple: X processus FARIMA(p,d,q) $(\alpha = 1-2d)$, $f(x) = H_2(x) = x^2 - 1$ $(m = 2)$ et Z processus de Rosenblatt.

Plan

Une inégalité de moments

On note:

- $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N)$ vecteur $\varepsilon-$standard: $\left|\mathrm{Cov}(X_t^{(u)} X_s^{(v)})\right| \leq \varepsilon$ pour tout $t \neq s, 1 \leq t, s \leq N$ et $1 \leq u, v \leq \nu$.
- $\sum'$: somme sur tous les $1 \leq t_i \leq N$ $(1 \leq i \leq p)$ avec $t_i \neq t_j (i \neq j)$.

Une inégalité de moments (fin)

Lemme

On suppose

- *pour* $1 \leq j \leq p$, $p \geq 2$, $1 \leq t \leq N$, $f_{j,t,N} \in \mathbb{L}^2(\mathbf{X})$ *fonctions telles que pour* $0 \leq \ell \leq p$, $f_{1,t,N}, \ldots, f_{\ell,t,N}$ *de rang d'Hermite* $\geq m$ *pour* $N \geq 1, 1 \leq t \leq N$;
- $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N)$ *vecteur Gaussien* $\varepsilon-$*standardisé avec* $\varepsilon < \frac{1}{\nu p - 1}$.

Alors

$$\sum{}' \left|\mathbb{E}\big[f_{1,t_1,N}(\mathbf{X}_{t_1}) \cdots f_{p,t_p,N}(\mathbf{X}_{t_p})\big]\right| \leq C(\varepsilon, p, m, \ell, \nu) K N^{p-\frac{\ell}{2}} \left| \max_{1 \leq t \leq N} \sum_{1 \leq s \leq N, s \neq t} \max_{1 \leq u,v \leq \nu} \left|Cov(X_t^{(u)}, X_s^{(v)})\right|^m \right|^{\frac{\ell}{2}},$$

$$\text{où} \qquad K = \prod_{j=1}^{p} \max_{1 \leq t \leq N} \|f_{j,t,N}\| \quad \text{avec} \quad \|f_{j,t,N}\|^2 = \mathbb{E}\big[f_{j,t,N}^2(\mathbf{X})\big].$$

Hypothèses

On suppose que

- $\left(\mathbf{X}^{(N)}(k)\right)_{1\leq k\leq N, N\in\mathbb{N}^*}$: tableau triangulaire de vecteurs gaussiens standardisés à valeurs dans $\mathbb{R}^\nu$ et on note

$$r_N^{(p,q)}(j,k) := \mathrm{Cov}(X^{(p,N)}(j), X^{(q,N)}(k)) \qquad (1\leq j,k\leq N).$$

- $f_{k,N}\in\mathbb{L}^2(\mathbf{X})$ $(N\geq 1, 1\leq k\leq N)$: fonctions de rang d'Hermite $\geq m\in\mathbb{N}^*$ tel qu'il existe $\phi_\tau, \tau\in[0,1]$ fonction continue de $\mathbb{L}^2(\mathbf{X})$ telle que

$$\sup_{\tau\in(0,1]}\|f_{[\tau N],N}-\phi_\tau\|^2 = \sup_{\tau\in(0,1]}\mathbb{E}\big(f_{[\tau N],N}(\mathbf{X})-\phi_\tau(\mathbf{X})\big)^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Il existe $(\rho(n))_n$ telle que $\max_{1\leq p,q\leq\nu}\left|r_N^{(p,q)}(j,k)\right|\leq|\rho(j-k)|$ et $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\rho(j)|^m<\infty.$

TLC (première version)

Théorème

On suppose que $\mathbb{E}\Big(N^{-1/2}\sum_{k=1}^{N} f_{k,N}\big(\mathbf{X}^{(N)}(k)\big)\Big)^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2$ *avec* $\sigma^2>0$. *Alors*

$$N^{-1/2}\sum_{k=1}^{N} f_{k,N}\big(\mathbf{X}^{(N)}(k)\big) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

TLC (deuxième version)

Théorème

On suppose qu'il existe un processus Gaussien stationnaire $(\mathbf{W}_\tau(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^\nu$ *tel que pour tout* $\tau \in [0,1]$ *et* $J \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\mathbf{X}^{(N)}([N\tau]+j)\right)_{-J\leq j\leq J} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \left(\mathbf{W}_\tau(j)\right)_{-J\leq j\leq J}.$$

Alors

$$N^{-1/2}\sum_{k=1}^{N} f_{k,N}\left(\mathbf{X}^{(N)}(k)\right) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

avec $\sigma^2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}\tau \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[\phi_\tau\left(\mathbf{W}_\tau(0)\right)\phi_\tau\left(\mathbf{W}_\tau(j)\right)\right]\Big).$

Idée de preuve

1. On considère $\phi_{\tau,t}$ le développement d'Hermite de ϕ_τ jusqu'à l'ordre t.
2. On prouve un TLC pour les $\phi_{\tau,t}(\mathbf{X}^{(N)}(k))$ en montrant que les cumulants des $\left(H_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{X}^{(N)}(t_1)), \cdots, H_{\mathbf{k}_p}(\mathbf{X}^{(N)}(t_p))\right)$ sont de l'ordre de $O(N)$ pour tout $p \geq 3$, $1 \leq t_i \leq N$.
$\Longrightarrow$ Utilisation de l'inégalité de moments.
3. On fait tendre t vers l'infini et on contrôle...

Plan

1. Un état de l'art des Théorèmes Centraux Limites pour les fonction de vecteurs gaussiens
   - Le cas indépendant
   - Le cas dépendant
2. Un TLC pour fonctionnelles de tableaux triangulaires gaussiens
   - Une inégalité de moments
   - Un TLC pour les fonctionnelles de tableaux triangulaires
3. Applications statistiques pour des processus non stationnaires
   - Statistique IR: rapport d'accroissements
   - Un TCL pour des processus localement stationnaires

IR: une mesure de l'irrégularité d'un processus

Soit $(X_0, X_{1/N}, \cdots, X_1)$ une trajectoire d'un processus gaussien

$\Longrightarrow$ On veut mesurer une irrégularité moyenne du processus.

On peut par exemple:

- Estimer de la dimension de Hausdorff du graphe.
- Estimer un coefficient de type Hölder du processus.

Example

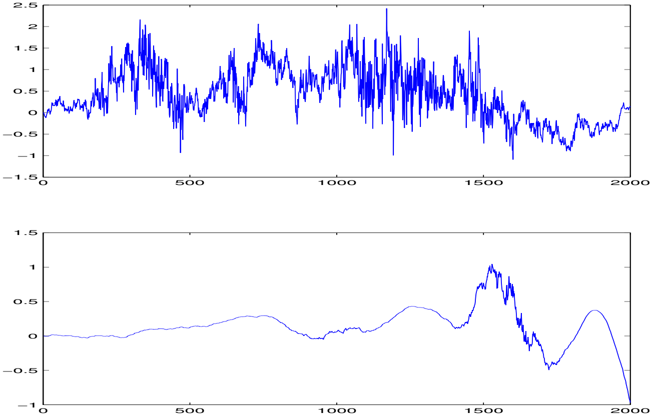


Figure: *Exemples de trajectoires de MBM (haut, $H \in \mathcal{C}^{\eta-}$ avec $\eta = 0.6$, bas $H(t) = 0.1 + 0.8(1-t)\sin^2(10t)$)*

IR: une mesure de l'irrégularité d'un processus (suite)

On définit:

$$R^{2,N}(X) \quad := \quad \frac{1}{N-2}\sum_{k=0}^{N-3}\frac{|\Delta_k^{2,N}X+\Delta_{k+1}^{2,N}X|}{|\Delta_k^{2,N}X|+|\Delta_{k+1}^{2,N}X|},$$

avec $\Delta_k^{2,N}X := X_{(k+2)/N} - 2\,X_{(k+1)/N} + X_{k/N}$ et la convention $\frac{0}{0} := 1$.

Comportement asymptotique de $R^{2,N}(X)$?

Comportement asymptotique de IR

On note

- $\sigma^2_{2,N}(k) := \mathbb{E}\Big[\Big(\Delta_k^{2,N} X\Big)^2\Big]$;
- $Y_N^{(1)}(k) := \dfrac{\Delta_k^{2,N} X}{\sigma_{2,N}(k)}, \qquad Y_N^{(2)}(k) \;:=\; \dfrac{\Delta_{k+1}^{2,N} X}{\sigma_{2,N}(k)}$;
- $f(x^{(1)}, x^{(2)}) := |x^{(1)} + x^{(2)}|/(|x^{(1)}| + |x^{(2)}|)$ pour $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Longrightarrow \quad R^{2,N}(X) = \frac{1}{N-2} \sum_{k=0}^{N-3} f\left(\mathbf{Y}_N(k)\right), \qquad \text{avec} \quad \mathbf{Y}_N(k) = (Y_N^{(1)}(k), Y_N^{(2)}(k)).$$

En "standardisant" $\mathbf{Y}_N(k)$ on obtient:

$$R^{2,N}(X) = \frac{1}{N-2} \sum_{k=0}^{N-3} f_{k,N}\left(\mathbf{X}_N(k)\right), \qquad \text{avec} \quad \mathbf{X}_N(k) = (X_N^{(1)}(k), X_N^{(2)}(k)).$$

Comportement asymptotique de IR (suite)

Soit $X = (X_t)_t$ un processus gaussien tel que

(A.1) Il existe $H(t) \in (0,1)$ et $c(t) > 0$ ($t \in [0,1]$) telles que $\forall j \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in(0,1)} \sqrt{N} \left| \frac{\mathbb{E}\big(X_{([Nt]+j)/N} - X_{[Nt]/N}\big)^2}{(j/N)^{2H(t)}} - c(t) \right| = 0 \text{ avec}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in(0,1)} \left|H(t)-H(t+\frac{1}{N})\right|\sqrt{N}\log N = 0 \text{ et } \lim_{N\to\infty} \sup_{t\in(0,1)} \left|c(t)-c(t+\frac{1}{N})\right|\sqrt{N} =$$

(A.2) Il existe $d > 0$, $\gamma > 1/2$, $0 \leq \theta < \gamma/2$ tels que pour $1 \leq k < j \leq N$ et $N \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\mathrm{Cor}\big[\Delta_k^{2,N} X \ \Delta_j^{2,N} X\big]\right| \leq d \ N^{\theta} \ |j-k|^{-\gamma}.$$

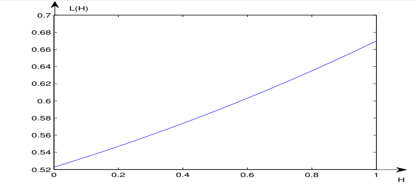
Comportement asymptotique de IR (suite)

Théorème

Si X est un processus gaussien vérifiant les hypothèses **(A.1-2)**,

$$\sqrt{N}\Big(R^{2,N}(X)-\int_0^1 \Lambda(H(t))dt\Big) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0,\int_0^1 \Sigma(H(\tau))d\tau\Big),$$

où $H \mapsto \Lambda(H)$ et $H \mapsto \Sigma(H)$ sont des fonctions de graphes:



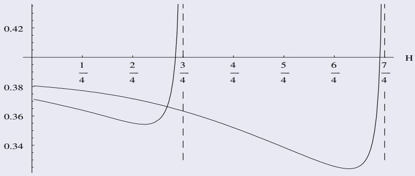


Figure: Tracés des fonctions $H \mapsto \Lambda(H)$ et $H \mapsto \Sigma(H)$

Processus localement stationnaire

On définit un processus localement stationnaire gaussien (Dahlhaus et Polonik, 2009)

$$X_{t,N} := \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{t,N}(j)\,\varepsilon_{t-j}, \qquad \text{pour tout } 1\le t\le N,\ N\in\mathbb{N}^*,$$

où

- $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a. gaussiennes standardisées;
- les suites $(a_{t,N}(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ sont telles qu'il existe $K\ge 0$ et $\alpha<1/2$ vérifiant,

$$\max_{1\le t\le N} |a_{t,N}(j)| \le \frac{K}{u_j}, \qquad \text{avec} \quad u_j := \max(1,|j|^{\alpha-1}) \ \text{ pour } j\in\mathbb{Z};$$

- il existe des fonctions $\tau\in(0,1]\mapsto a(\tau,j)\in\mathbb{R}$ vérifiant:

$$\begin{aligned} \sup_{\tau\in(0,1]} |a(\tau,j)| \quad &\le \quad \frac{K}{u_j}, \qquad \forall j\in\mathbb{Z}, \\ \text{et} \qquad \sup_{\tau\in(0,1]} \max_{|[N\tau]-k|\le L} \big|(a_{k,N}(j)-a(\tau,j)\big| \quad &\to \quad 0, \qquad \forall j\in\mathbb{Z}, \quad \forall L>0. \end{aligned}$$

Un TCL pour processus localement stationnaire

Théorème

Soit $W_\tau(t) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} a(\tau,j)\,\varepsilon_{t-j}$ *et* $\mathbf{W}_\tau(j) \ := \ \big(W_\tau(j+1),\dots,W_\tau(j+\nu)\big)^{\mathsf{T}}$. *Si les fonctions* $(f_{k,N})_{1\le k\le N, N\in\mathbb{N}^*}$ *ont un rang d'Hermite m avec* $m > 1/(1-2\alpha)$ *et "tendent" vers* ϕ_τ *(voir précédemment). Alors*

$$N^{-1/2}\sum_{k=1}^{N} f_{k,N}\big(\mathbf{X}_{k,N}\big) \ \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \ \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

avec $\sigma^2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}\tau \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[\phi_\tau\left(\mathbf{W}_\tau(0)\right)\phi_\tau\left(\mathbf{W}_\tau(j)\right)\right]\Big)$.